

Université Abdelmalek Essaâdi
FST de Tanger

M121/MPC: GII4-GII5-GII6
et GEGM: GII2

Année 07/08

Contrôle continu 1 (durée : 2 heures)

Exercice 1

On considère la série de fonctions

$$\begin{cases} \sum_{n \geq 1} u_n(x) \\ u_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} (x^{2n} - x^{2n+1}) \end{cases}$$

- 1) Montrer qu'elle converge uniformément sur $[0; 1]$.
- 2) Montrer que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} (x^{2n} - x^{2n+1})$ est une série entière de variable réelle x . Déterminer son rayon de convergence.
- 3) En déduire que $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$ est indéfiniment dérivable sur $[0; 1]$.

Exercice 2

I) a) Etudier la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$; $x \in \mathbb{R}$.

b) Etudier la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n (\ln n)^x}$; $x \in \mathbb{R}$.

II) On considère les fonctions f et g définies sur $]1, +\infty[$ par :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n (\ln n)^x}$$

- a) Montrer que f est continue sur $]1, +\infty[$.
- b) Calculer la dérivée $k^{\text{ième}}$; $k \in \mathbb{N}^*$, de la fonction $x \rightarrow u_n(x) = \frac{1}{n^x}$, et montrer que $\forall a > 1$

$$|u_n^{(k)}(x)| \leq \frac{(\ln n)^k}{n^a}; \quad \forall x \in [a, +\infty[$$

- c) Montrer que f est indéfiniment dérivable sur $]1, +\infty[$.
- d) Montrer que g est continue sur $]1, +\infty[$. Est-elle dérivable sur cet intervalle?

Exercice 3

a) Montrer que $\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |1 - e^{-i\theta}| = 2 \left| \sin \frac{\theta}{2} \right|, |1 - e^{in\theta}| \leq 2$ et

$$|1 + e^{i\theta} + e^{2i\theta} + \dots + e^{in\theta}| \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{\theta}{2} \right|}; \quad \text{pour } \theta \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

b) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n}$

Exercice 3

- a) Montrer que $\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |1 - e^{-i\theta}| = 2 \left| \sin \frac{\theta}{2} \right|, |1 - e^{in\theta}| \leq 2$ et

$$|1 + e^{i\theta} + e^{2i\theta} + \dots + e^{in\theta}| \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{\theta}{2} \right|}, \text{ pour } \theta \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

- b) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n}$.

- c) Étudier la série $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n}$ sur le cercle $|z| = R$.

Exercice 1 1/ $U_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} (x^{2n} - x^{2n+1}) = \frac{x^{2n}}{\sqrt{n}} (1-x)$
 $U_n'(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} (2nx^{2n-1} - (2n+1)x^{2n}) = \frac{x^{2n-1}}{\sqrt{n}} (2n - (2n+1)x)$

x	0	$\frac{2n}{2n+1}$	
$U_n'(x)$	0	+	0
$U_n(x)$	0		-

$U_n'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \frac{2n}{2n+1}$

$\forall x \in [0, 1]: U_n(x) \leq U_n\left(\frac{2n}{2n+1}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{2n} \left(1 - \frac{2n}{2n+1}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}(2n+1)} \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{2n}$

On a $\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{2n} = e^{2n \ln\left(\frac{2n}{2n+1}\right)} = e^{-2n \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right)} \sim e^{-1}$

d'où $U_n\left(\frac{2n}{2n+1}\right) \sim \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}(2n+1)} \sim \frac{1}{2e \cdot n^{3/2}}$

$\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ c.v (Série de Riemann ; $\alpha = 3/2 > 1$) donc $\sum U_n(x)$ est normale

convergente sur $[0, 1]$ donc la c.v est une forme

2/ $U_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} (x^{2n} - x^{2n+1}) = \frac{1}{\sqrt{n}} x^{2n} - \frac{1}{\sqrt{n}} x^{2n+1}$ donc $\sum U_n(x)$ est une série

comme somme de 2 séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ avec $\begin{cases} a_n = 0 \text{ si } n \text{ impair} \\ b_n = 0 \text{ si } n \text{ pair} \end{cases}$

On a $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ $U_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} x^{2n}$, $U_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} x^{2n+1}$

$\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)} = \frac{x^{2n+2}}{x^{2n}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} x^2 \rightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1$ d'où $R_1 = 1$

$\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)} = \frac{x^{2n+3}}{x^{2n+1}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} x^2 \rightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1$ d'où $R_2 = 1$

d'où $R = \inf(R_1, R_2) = 1$

3/ $\sum U_n(x)$ est une série entière de rayon de c.v, $R=1$ alors la f.s. f est définie sur $] -1, 1[$ par $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)$ est indéfiniment dérivable sur $] -1, 1[$ et $\forall n \in \mathbb{N}: f^{(n)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n^{(n)}(x)$, donc en particulier si

Exercice 2 1/ a/ $U_n(x) = \frac{1}{n^x}$, $x \in \mathbb{R}$

Pour $x < 0$: $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n(x) = +\infty \neq 0$ donc $\sum U_n(x)$ diverge

Pour $x = 0$: $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n(x) = 1 \neq 0$ donc $\sum U_n(0)$ diverge

Pour $x > 1$: $\sum \frac{1}{n^x}$ c.v ; Pour $0 < x \leq 1$: $\sum \frac{1}{n^x}$ div (R)

$\sum \frac{1}{n^x}$ a même sens que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{1}{y^x} dy$ car la fct $f(y) = \frac{1}{y^x} = e^{-x \ln y}$ est positive, décroissante vers 0

Ainsi $\sum \frac{1}{n^x}$ converge sur $D =]1, +\infty[$

$\sum \frac{1}{n} \text{ div} \Rightarrow \sum U_n(x) \text{ div}$
 si $x > 0$ alors la suite $\left(\frac{1}{n (\ln n)^x} \right)_{n \geq 2}$ est décroissante vers 0.
 effet: $U_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+1) (\ln(n+1))^x} < \frac{1}{n (\ln n)^x} = U_n(x)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n(x) = 0$
 $\sum U_n(x)$ est de même nature que l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{y (\ln y)^x} dy = I$

$$I = \int_2^{+\infty} (\ln y)' (\ln y)^{-x} dy = \left[\frac{(\ln y)^{-x+1}}{-x+1} \right]_2^{+\infty} < +\infty \text{ si et si } -x+1 < 0 \text{ c-à-d } x > 1$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \text{ et } g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n (\ln n)^x}$$

Remarque: f est continue sur $]1, +\infty[\Leftrightarrow \forall a > 1$: f est continue sur $[a, +\infty[$
 si $x \in [a, +\infty[$ c-à-d $x \geq a$ on a $n^x \geq n^a \Rightarrow \frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^a}$
 or $a > 1 \Rightarrow \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^a} \text{ c.v.} \Rightarrow \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x} \text{ est normalement convergente donc}$
 formellement c.v. sur $[a, +\infty[$
 plus $U_n(x) = \frac{1}{n^x}$ est continue sur $[a, +\infty[$ donc f est continue sur $[a, +\infty[$
 donc f est continue sur $]1, +\infty[$

$$U_n(x) = \frac{1}{n^x} = e^{-x \ln n}$$

$$a > 1; \forall x \geq a \quad U_n'(x) = -\ln n e^{-x \ln n}; \quad U_n''(x) = (-\ln n)^2 e^{-x \ln n}$$

$$\dots \quad U_n^{(k)}(x) = (-\ln n)^k e^{-x \ln n} = (-1)^k (\ln n)^k \cdot \frac{1}{n^x}$$

$$\text{et } |U_n^{(k)}(x)| \leq \frac{(\ln n)^k}{n^a} \text{ car } \frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^a}$$

1 Remarque: f est indéfiniment dérivable sur $]1, +\infty[\Leftrightarrow f$ est indéfiniment dérivable sur $[a, +\infty[; \forall a > 1 \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}^*, \forall a > 1$: f est k fois dérivable sur $[a, +\infty[$

Après b/ $U_n(x)$ est k fois dérivable sur $[a, +\infty[$

$$\text{Considérons } 1 < \alpha < a \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha \frac{(\ln n)^k}{n^a} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\ln n)^k}{n^{\alpha}} = 0$$

$$\text{Ainsi pour } \varepsilon = 1 \quad \exists N > 0 : \forall n > N \quad n^\alpha \frac{(\ln n)^k}{n^a} < 1 \text{ c-à-d } \frac{(\ln n)^k}{n^\alpha} < \frac{1}{n^{\alpha}}$$

Or $\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ c.v.} \Rightarrow \sum \frac{(\ln n)^k}{n^\alpha} \text{ c.v.} \Rightarrow \sum U_n^{(k)}(x) \text{ c.v. normalement}$
 donc uniformément sur $[a, +\infty[$ vers $f^{(k)}(x)$ donc $f^{(k)}(x)$ existe
 sur $]1, +\infty[$. Ainsi f est de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$.

$$1/ \quad U_n(x) = \frac{1}{n^x} = \frac{1}{e^{x \ln n}} = e^{-x \ln n}$$

$$U_n'(x) = -\ln n \cdot e^{-x \ln n} = -\ln n \cdot U_n(x)$$

$$U_n''(x) = (-\ln n)^2 \cdot U_n(x)$$

$$\dots$$

$$U_n^{(k)}(x) = (-\ln n)^k \cdot e^{-x \ln n} = (-1)^k (\ln n)^k \cdot \frac{1}{n^x}$$

$$\text{et } |U_n^{(k)}(x)| \leq \frac{(\ln n)^k}{n^a} \quad \text{car } \frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^a}$$

c/ N.B. f est indéfiniment dérivable sur $]1, +\infty[\Leftrightarrow f$ est indéfiniment dérivable sur $[a, +\infty[\quad \forall a > 1$
 $\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}^* \quad f$ est k fois dérivable sur $[a, +\infty[\quad \forall a > 1$

D'après b/ $U_n(x)$ est k fois dérivable sur $[a, +\infty[$
 Considérons $a < \alpha < a$ alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^a \frac{(\ln n)^k}{n^a} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\ln n)^k}{n^{a-\alpha}} = 0$
 car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\ln n)^k}{n^{\alpha}} < 1$ car $\frac{(\ln n)^k}{n^{\alpha}} < 1$

Ainsi pour $\varepsilon = 1 \quad \exists N > 0 \quad \forall n > N : n^a \frac{(\ln n)^k}{n^a} < 1$ i.e. $\frac{(\ln n)^k}{n^a} < \frac{1}{n^a}$
 Or $\sum \frac{1}{n^a}$ c.v. $\Rightarrow \sum \frac{(\ln n)^k}{n^a}$ c.v. $\Rightarrow \sum U_n^{(k)}(x)$ c.v. norm
 donc uniformément sur $[a, +\infty[$ vers $f^{(k)}(x)$ donc $f^{(k)}(x)$ existe sur $]1, +\infty[$ Ainsi f est C^∞ sur $]1, +\infty[$

d/ g continue sur $]1, +\infty[\Leftrightarrow g$ continue sur $[a, +\infty[\quad \forall a > 1$
 $\bullet \quad \forall a > 1 : \forall n \geq 2 : \frac{1}{n(\ln n)^x} \leq \frac{1}{n(\ln n)^2}$ et $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ est c.v.
 (d'après I, b)) donc $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^x}$ c.v. normalement
 donc uniformément sur $[a, +\infty[$. De plus $U_n(x) = \frac{1}{n(\ln n)^x}$ est continue sur $[a, +\infty[$ donc g est continue sur $[a, +\infty[$
 On en déduit que g est cont sur $]1, +\infty[$

La suite de fct $(u_n(x))_n$ est dérivable sur $[a, +\infty[$ $\forall a > 1$

$$\text{et } u_n'(x) = \left(\frac{1}{n} \cdot e^{-x \ln(\ln n)} \right)' = - \frac{\ln(\ln n)}{n} e^{-x \ln(\ln n)} = - \frac{\ln(\ln n)}{n(\ln n)}$$

$$\text{donc } |u_n'(x)| \leq \frac{|\ln(\ln n)|}{n(\ln n)^a} = \frac{\ln(\ln n)}{n} e^{-a \ln(\ln n)}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \cdot \frac{\ln(\ln n)}{n} e^{-a \ln(\ln n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln(\ln n) e^{-a \ln(\ln n)} = 0$$

$$\exists N > 0 \quad \forall n > N \quad n^2 \cdot \frac{|\ln(\ln n)|}{n} e^{-a \ln(\ln n)} < 1 \Rightarrow \frac{\ln(\ln n)}{n} e^{-a \ln(\ln n)} < \frac{1}{n}$$

$$\sum \frac{1}{n^2} \text{ c.v.} \Rightarrow \sum \frac{\ln(\ln n)}{n(\ln n)^a} \text{ c.v.} \Rightarrow \sum u_n'(x) \text{ c.v. normalisée}$$

donc uniformément sur $[a, +\infty[$ donc g est dérivable sur $]a, +\infty[$

$$\text{et } \forall x \in [a, +\infty[\quad g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(x) \quad \text{donc } g \text{ est dérivable sur }]1, +\infty[$$

Exercice 3

$$a) 1 - e^{-i\theta} = \frac{e^{i\theta/2} (1 - e^{-i\theta})}{e^{i\theta/2}} = \frac{e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2}}{e^{i\theta/2}} = \frac{2i \sin \frac{\theta}{2}}{e^{i\theta/2}} \Rightarrow |1 - e^{-i\theta}| = \frac{|2i \sin \frac{\theta}{2}|}{|e^{i\theta/2}|}$$

$$|e^{i\theta/2}| = |\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2}| = \sqrt{\cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2}} = 1 \quad \rightarrow |1 - e^{-i\theta}| = 2 |\sin \frac{\theta}{2}|$$

$$\bullet |1 + e^{i\theta} + e^{2i\theta} + \dots + e^{in\theta}| = \left| \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} \right| \leq \frac{|1 - e^{i(n+1)\theta}|}{|1 - e^{i\theta}|} \leq \frac{1 + |e^{i(n+1)\theta}|}{|1 - e^{i\theta}|} \leq \frac{2}{2 |\sin \frac{\theta}{2}|} \leq \frac{1}{|\sin \frac{\theta}{2}|}$$

$$b) U_n(z) = \frac{z^n}{n} \quad \left| \frac{U_{n+1}(z)}{U_n(z)} \right| = \left| \frac{z^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{z^n} \right| = \frac{n}{n+1} |z| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |z|$$

si $|z| < 1$ alors $\sum U_n(z)$ c.v. donc $R=1$ $1 - \frac{(1-z)}{2} = 1$

c) Pour $|z|=R$ on a $z = R e^{i\theta} = e^{i\theta}$

$$U_n(z) = \frac{(R e^{i\theta})^n}{n} = \frac{1}{n} e^{in\theta} = a_n b_n$$

$$a_n = \frac{1}{n} > 0, \text{ can } \downarrow, \lim a_n = 0, \quad \left| \sum_{k=0}^n b_k \right| \leq \frac{1}{|\sin \frac{\theta}{2}|} \text{ d'après a)}$$

d'après le th d'Abel $\sum \frac{e^{in\theta}}{n}$ est convergente



ETU UP.com

Programmmation
Cours
Electricité
Physique
Résumés
Analyse
Livres
Exercices
Contrôles Continus
Langues
Thermodynamique
Multimedia
Divers
Economie
Travaux Dirigés
Chimie Organique
Informatique
Optique
Chimie
Algèbre
Corrigés
Mathématiques
Mécanique
Travaux Pratiques
Droit

et encore plus..